Analyse (03/04)
Tentamen, Vrijdag 2 juli, 2004
duur: 3 uur.

Lees elk opgave eerst in zijn geheel door. Vermeld de gebruikte stellingen kort en bondig. Een antwoord zonder toelichting, ook al is het antwoord goed, levert geen punten op.

1.[1,9] Bewijs dat $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ een C^1-functie is op $\mathbb{R}^2$ en bepaal $f'(x,y)$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Besteed speciale aandacht aan het punt $(x,y) = (0,0)$. Geef duidelijk aan wat er aangetoond moet worden.

2.[1] De onderdelen (a) en (b) zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[4] De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is C^2, k is een geheel getal en gegeven is dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en $t \in (0,\infty)$: $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$.
(i) Bewijs:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y).$$

(ii) Leid een soortgelijke formule af voor

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Welke stelling over gemengde partiële afgeleiden heb je hierbij nodig?
(b)[5] Stel $O = (0,\infty) \times \mathbb{R}$, $U = (0,\infty) \times (0,\infty)$ en $(u,v) = \Phi(x,y) = (x, xe^y)$.
(i) Bewijs dat Φ een C^∞-diffeomorfisme van O op U definieert.
(ii) Stel $f : O \to \mathbb{R}$ is een C^1-functie die voldoet aan de vergelijking

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Bewijs: Er is een C^1-functie $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zodat $f(x,y) = g(xe^y)$.
(Aanwijzing: Definieer de functie $h(u,v) = f \circ \Phi^{-1}(u,v)$ en toon aan $\dfrac{\partial h}{\partial u} = 0$ waaruit volgt dat $h(u,v)$ alleen van v afhangt.)

3.[1] Beschouw de vergelijkingen: $x^2 - 2xy - xy^2z = 1$, $3x^2y + 2xz = 4$. $(*)$
(i)[3] Toon aan dat er een open omgeving $U \subset \mathbb{R}$ van $x = 1$ en C^∞-functies $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ zijn waarvoor geldt: $\varphi(1) = 2$, $\psi(1) = -1$ en voor elke $x \in U$ voldoet het punt $(x,y,z) = (x,\varphi(x),\psi(x))$ aan $(*)$.
(ii)[4] Bepaal $\varphi'(1)$ en $\psi'(1)$.
(iii)[2] Bepaal de richtingsvector van de raaklijn in $(1,2,-1)$ aan de deelvariëteit S van alle punten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die voldoen aan de vergelijkingen in $(*)$. (Aanwijzing: gebruik een parametrisering van een open stukje van S om $(1,2,-1)$.)

Z.O.Z.

(vervolg tentamen)

4.[1] Beschouw de functie $f(x,y) = xy$ op de cirkelschijf

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 12\}.$$

(i)[3] Schets D, geef een tekenoverzicht van f op D (waar is $f > 0$, < 0 en $= 0$?) en beredeneer dat f minstens vier locale extrema op D bezit.
(ii)[1] Laat zien dat f geen locale extrema in het inwendige van D heeft.
(iii)[4] Bepaal de punten waarin locale extrema worden aangenomen.
(iv)[1] Bepaal de globale extrema van f op D.

5.[1,9] Formuleer en bewijs de stelling over de middelwaardeschatting:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\|.$$